E.N.S.I. PHYSIQUE-MECANIQUE Option M 1981

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

K *désignant* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *on note* $\mathfrak{M}_{np}(K)$ *l'espace vectoriel sur* K *des matrices à* n *lignes et* p *colonnes à coefficients dans* K *et* $\mathfrak{M}_n(K)$ *l'anneau des matrices carrées d'ordre* n *à coefficients dans* K. *On note* O *la matrice nulle de* $\mathfrak{M}_{np}(K)$ *et* I *la matrice unité de* $\mathfrak{M}_n(K)$.

Pour chaque $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, *on note* ε_k *la matrice de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ *telle que :*

$$\varepsilon_{kk} = 1, \qquad \varepsilon_{ij} = 0 \quad si \quad (i, j) \neq (k, k)$$

Pour un vecteur V *de* $\mathbb{R}^n$ *(ou* $\mathbb{C}^n$*), on note* $(V)_i$ *sa* $i^{ème}$ *composante par rapport à la base canonique. Dans toute la suite du problème, on utilisera la même lettre pour désigner un vecteur de* $\mathbb{R}^n$ *(ou* $\mathbb{C}^n$*) et la matrice colonne de ses composantes par rapport à la base canonique de* $\mathbb{R}^n$ *(ou* $\mathbb{C}^n$*).*

I

n et k sont deux entiers tels que $2 \leqslant k \leqslant n$, $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ est l'espace vectoriel des endomorphismes de $\mathbb{C}^n$. Soient k éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$: $f_1, f_2, \ldots, f_k$ différents de l'élément neutre additif O tels que :

$$\begin{cases} f_1 + f_2 + \ldots + f_k = I_d \\ f_i \circ f_j = 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

où I_d désigne l'application identique.

1° Montrer que pour tout i, on a : $f_i \circ f_i = f_i$.

2° Montrer que $f_1, f_2, \ldots, f_k$ sont des éléments linéairement indépendants de $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$.

3° Montrer que pour tout i, on a :

$$\begin{cases} (I_d - f_i) \circ (I_d - f_i) = I_d - f_i \\ \text{Ker}\,(I_d - f_i) = I_m(f_i) \end{cases}$$

4° On pose $I_m(f_i) = E_i$.

a. Montrer que :

$$x_i \in E_i \Rightarrow (f_i(x_i) = x_i \quad \text{et} \quad \forall j \neq i \qquad f_j(x_i) = 0)$$

b. En déduire que $\mathbb{C}^n$ est la somme directe des sous-espaces $E_1, E_2, \ldots, E_k$.

c. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de f_i.

5° *a.* $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ étant donnés dans $\mathbb{C}$, déterminer pour $p \in \mathbb{N}^*$ la puissance $p^{ième}$ de l'endomorphisme f, défini par :

$$f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_k f_k$$

b. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

.../...

6° $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ étant tous distincts, soit $D_n \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice définie par :

$$D_n = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \ldots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_2^{n-1} \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{avec } \Delta_n = \det [D_n]$$

a. Trouver une relation de récurrence entre les déterminants Δ_n et Δ_{n-1}.

b. En déduire alors la valeur de Δ_n.

c. Retrouver ce résultat par une autre méthode.

7° Montrer que les endomorphismes f_i, I_d, f, f^2, ..., f^{k-1} ne sont pas linéairement indépendants.

8° *a.* Montrer que tout entier i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant k$, il existe un polynôme P_i à une indéterminée à coefficients dans C de degré $(k-1)$ vérifiant :

$$\begin{cases} P_i(\alpha_i) = 1 \\ P_i(\alpha_j) = 0 \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, k\}, j \neq i \end{cases}$$

b. Donner l'expression factorisée de $P_i(x)$.

c. En déduire l'expression de f_i à l'aide de $I_d, f, f^2, \ldots, f^{k-1}$.

II

Pour $n \geqslant 2$, soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et soit $(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ une base de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs propres de A associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ distinctes.

On note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ à la base $(V_1, V_2, \ldots, V_n)$.

1° Montrer qu'il existe n matrices $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ appartenant à $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ tel que :

$$A = \lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2 + \ldots + \lambda_n \pi_n$$

On donnera les expressions de π_i, $\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ en fonction de P et des matrices ε_i définies dans le préambule.

2° Montrer que les matrices π_i vérifient les relations suivantes :

$$\begin{cases} \pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_n = 1 \\ \pi_i \pi_j = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ \pi_i \text{ si } i = j \end{cases} \end{cases}$$

3° Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$A^p = \lambda_1^p \pi_1 + \lambda_2^p \pi_2 + \ldots + \lambda_n^p \pi_n$$

a. Par utilisation de la définition de deux matrices semblables.

b. Par application du 2°.

.../...

4° *a.* Pour $k = n$, que représentent les E_i du 4° I, lorsque f_i est l'endomorphisme dont la matrice par rapport à la base canonique de $\mathbb{C}^n$ est la matrice π_i ?

b. Montrer que si V est un vecteur de $\mathbb{C}^n$ tel que $(\pi_i\ V) \neq 0$, alors $(\pi_i\ V)$ est vecteur propre de A.

c. Calculer le produit $\pi_i\ V_j$ pour $(i, j) \in \{1, 2, \ldots, n\}^2$.

d. Que peut-on en déduire concernant le rang de π_i et les vecteurs colonnes π_i ?

e. En déduire alors une méthode simple pour former une matrice P de changement de base par la seule connaissance des matrices π_i.

5° *a.* Soit $H \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $H_i = \varepsilon_i H$ et $K_i = H \varepsilon_i$; expliquer comment on passe de H à H_i d'une part et de H à K_i d'autre part.

b. Peut-on en déduire, une fois exprimée une matrice P, l'expression de son inverse P^{-1} par la seule connaissance des π_i?

6° Si B est une matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, admettant pour valeurs propres $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, on appelle trace de B, le nombre :

$$tr\ (B) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$$

Montrer que les matrices $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ ont même trace.

7° On suppose la matrice A inversible.

a. Déterminer les valeurs et les vecteurs propres de A^{-1}.

b. En déduire que A^{-1} est diagonalisable.

c. Montrer que la relation du 3° II est valable pour $p \in \mathbb{Z}$.

8° Soit $C(A) = (C_{ij})$ la transposée de la matrice des cofacteurs de A avec C_{ij} = cofacteur de a_{ji}; en supposant A inversible, déduire les valeurs propres et vecteurs propres de C (A) ainsi que la trace de cette matrice.

III

Applications numériques

1° Déterminer les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de la matrice

$$A = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 4 \\ 5 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

On notera $|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3|$ et on choisira la première composante de chacun des vecteurs propres égale à 1.

2° Exprimer en utilisant le 8° *c* du I, une expression de chacun des π_i de A en fonction de A^2, A, I.

3° Par utilisation du 4° *e* du II, donner l'expression de la matrice P de changement de base.

4° Déduire alors, sans calculs directs sur P, l'expression de la matrice P^{-1}.

5° *a.* Montrer que si V est un vecteur de $\mathbb{R}^3$, tel que $(\pi_1\ V) \neq 0$, il existe $p_0 > 0$ tel que :

$$p \geqslant p_0 \Rightarrow (A^p V)_i \neq 0 \qquad \forall i \in \{1, 2, 3\}$$

b. En déduire, lorsque $(\pi_1\ V) \neq 0$, la valeur de :

$$\lambda = \lim_{p \to \infty} \left\{ \frac{(A^{p+1}\ V)_i}{(A^p\ V)_i} \right\} \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}$$

puis celle de :

$$W = \lim_{p \to \infty} \left(\frac{1}{\lambda^p} A^p\ V \right)$$

c. Que représentent λ et W?

XXXXX

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail